Научная статья
УДК 512.573 + 512.543.72
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-113-133

ТЕРНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ КУЛАКОВА С ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ТОЖДЕСТВОМ

Михаил Владимирович Нещадим[1]
Андрей Артёмович Симонов[2]

[1] Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,

[2]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

[1]neshch@math.nsc.ru
[2]a.simonov@g.nsu.ru

Аннотация

Даны определения алгебраических систем Кулакова и построены примеры на основе известных физических законов. Определена тернарная алгебраическая система Кулакова ранга (m, n, ℓ), удовлетворяющая аксиомам физической структуры. Построено новое решение ранга $(2, 2, 2)$, отличное от известного. При помощи известных бинарных физических структур построены новые тернарные физические структуры.

Ключевые слова и фразы

Алгебраическая система Кулакова, алгебра Кулакова, многосортная алгебра, физическая структура, теория физических структур, группа, ограниченно точно транзитивная группа, теория измерений.

Источник финансирования

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009).)

Для цитирования

Нещадим М.В., Симонов А.А. Тернарные алгебры Кулакова с элементарным тождеством //*Математические труды*, 2025, Т. 28, № 1, С. 113-133. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-113-133

TERNARY KULAKOV ALGEBRAS WITH ELEMENTARY IDENTITY

Mikhail V. Neshchadim[1], **Andrey A. Simonov**[2],

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

[2] Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

[1]neshch@math.nsc.ru
[2]a.simonov@g.nsu.ru

Abstract

Kulakov algebraic systems are defined and examples are constructed on the basis of known physical laws. A ternary Kulakov algebraic system of rank (m, n, ℓ) satisfying the axioms of physical structure is defined. A new solution of rank $(2, 2, 2)$ different from the known one is constructed. With the help of known binary physical structures, new ternary physical structures are constructed.

Keywords

Kulakov algebraic system, Kulakov algebra, multisorted algebra, physical structure, physical structure theory, group, boundedly exact transitive group, measure theory.

Funding

The work was financially supported by the program of fundamental scientific research of SO RAN № I.1.5.(FWNF-2022-0009).

For citation

Neshchadim M. V., Simonov A. A., Ternary Kulakov algebras with elementary identity //*Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 1, P. 113-133. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-113-133

§ 1. Введение и постановка задачи

Прежде чем перейти к сути вопроса, приведём слова Юджина Вигнера: “Вовсе не очевидно, что «законы природы» должны существовать; возможность их существования куда менее очевидна, чем способность человека обнаруживать такие законы” (из статьи *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*) [1]. Как только начали множиться различные направления и разделы физики, описываемые своими физическими законами, наверное, сразу же возникло желание понять

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 113-133
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 113-133

как они связаны, увидеть их общую структуру и предсказать вид новых законов.

Особая трудность задачи заключена в том, что понятие закона, также как и понятие числа, относится к *начальным понятиям*, которые могут быть разъяснены, но не могут быть строго определены, ибо всякая попытка дать строгое определение такого понятия неизбежно сведётся к замене определяемого понятия ему эквивалентным [2, стр. 11].

Когда речь заходит о понятии «закона», то на интуитивном уровне всем понятно, что это такое. Но при более пристальном рассмотрении всё становится не так очевидно. Можно сказать, что закон — это некоторое ограничение. Но тогда любое ограничение — закон? Нет. Знание закона должно позволять осуществлять предсказания. Т.е., с одной стороны — это ограничение, а с другой стороны — предсказание. Имея какие-то предварительные данные о поведении объекта, мы, на основании этих данных, можем предсказать, как он поведёт себя дальше.

Хотелось бы получить «периодическую таблицу» возможных законов. Для этого в нашем арсенале имеются:

1. числовые измерения (натуральные, вещественные, комплексные, а также вектора и матрицы),

2. размерные величины, связанные с эталонами.

С каждым из этих пунктов связаны ограничения на возможный вид законов. Изучение таких ограничений и возможностей реализуется в построении соответствующих теорий.

Теория измерений [3, 4] изучает различные аспекты измерений, приводящие к понятию *шкалы* и инвариантности закона относительно выбора шкал.

Теория размерности [5, 6] позволяет по размерностям величин, входящих в зависимости выводить точные формулы. Сама теория размерности начала своё развитие с конца девятнадцатого века, с первых работ по π–теореме [7, 8]. При решении многих физических задач теория размерности и подобия даёт возможность оценить искомое значение, получая приемлемый результат с точностью до порядка величины, полагаясь только на физическую интуицию. Но хотелось бы более точного результата.

Теория физических структур [9, 10] была введена Ю.И. Кулаковым в середине 60-х годов прошлого века для описания математической теории, ориентированной на классификацию физических законов. В ней есть пересечение как с теорией размерности, так и с теорией измерений [11].

Перед тем как перейти к определениям, приведём пример, характеризующий постановку задачи в теории физических структур [9].

Пример 1. Рассмотрим второй закон Ньютона, который можно записать в виде $f = ma$, где m — масса тела, a — его ускорение и f — сила, действующая на тело. Можно ли дать формулировку второго закона Ньютона так, чтобы не потребовалось предварительно определять понятие массы и силы?

Для этого Ю.И. Кулаков [9] рассмотрел два множества: множество тел $\mathfrak{M}$ и множество источников сил $\mathfrak{N}$. При этом, если элементы множеств взаимодействуют между собой, то мы наблюдаем ускорение $a_{i\alpha}$ тела $i \in \mathfrak{M}$ под воздействием источника силы $\alpha \in \mathfrak{N}$, которое можем измерить. Ускорение $a_{i\alpha}$ — это аналог «расстояния» между телом i и источником силы α. Для произвольных двух тел $i, j \in \mathfrak{M}$ и источников силы $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ измерим четыре ускорения $a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta} \in \mathbb{R}$. Если говорить о физических измерениях, то с достаточной степенью точности имеет место соотношение:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Используя произвольные, в качестве эталонов, точки $j_0 \in \mathfrak{M}$, $\beta_0 \in \mathfrak{N}$ придём к выражению: $a_{j_0\alpha} = \frac{a_{j_0\beta_0}}{a_{i\beta_0}} a_{i\alpha}$, которое после переобозначений $a_{j_0\alpha} = F_\alpha$, $\frac{a_{j_0\beta_0}}{a_{i\beta_0}} = m_i$ можно записать в хорошо известном виде второго закона Ньютона: $F_\alpha = m_i a_{i\alpha}$. Таким образом, «физическая структура», связанная со вторым законом Ньютона, характеризуется множествами $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathbb{R}$, функцией $a : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$, и тождеством (1). Сила F_α определяется при помощи ускорения $a_{j_0\alpha}$ эталонного тела j_0, инертная масса m_i — при помощи ускорения $a_{i\beta_0}$ тела i после воздействия эталонного источника силы β_0.

Исходя из рассмотренного примера, можно поставить задачу поиска нетривиальных функций

$$f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R} \tag{2}$$

и тождеств g таких, что значения функции $f_{i\alpha} = f(i, \alpha)$ для произвольных $i, j \in \mathfrak{M}$ и $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ оказываются связанными между собой тождеством

$$g(f_{i\alpha}, f_{i\beta}, f_{j\alpha}, f_{j\beta}) = 0. \tag{3}$$

Решение этой задачи для $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathbb{R}$ получил Ю.И. Кулаков [12].

Так как функция (2) построена на соответствии двум точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ измеряемой величины $f : i \times \alpha \mapsto a_{i\alpha}$, то такая физическая структура называется «бинарной». Если функция (3) построена на двух элементах $i_1, i_2 \in \mathfrak{M}$ из одного множества и двух элементах $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{N}$ из другого множества, то такая физическая структура имеет ранг $(2, 2)$. Обобщив задачу на случай m элементов $i_1, \ldots, i_m \in \mathfrak{M}$ и n элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{N}$, придём к бинарной физической структуре ранга (m, n). Такие структуры с функцией (2) были полностью описаны Михайличенко [13].

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 113-133
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 113-133

Тернарные физические структуры, построенные на

– одном множестве [9, Дополнение Г.Г. Михайличенко, §6] с функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$,

– двух множествах [14] с функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$ и

– трёх множествах [15] с функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{T} \to \mathbb{R}$
впервые рассмотрел Г.Г. Михайличенко. При поиске решений над гладкими многообразиями были получены соотношения между рангом физической структуры и размерностями многообразий. В [16] также рассматривались различные варианты n-арных алгебр Кулакова (физических структур) и, в частности, тернарные.

Михайличенко, построив решение физической структуры для ранга $(2, 2, 2)$ замечает [15], что "…в схеме тернарных физических структур ранга (m, n, ℓ), полученный здесь результат, как показывают предварительные исследования, является единственно возможным, т.е. тернарные физические структуры существуют только в простейшем случае $m = n = \ell = 2$ …". В свете этого замечания авторов особенно вдохновляет то, что подход, предложенный в данной работе, позволяет построить не только новые алгебры Кулакова ранга $(2, 2, 2)$, но и других рангов (m, n, ℓ), отличных от $(2, 2, 2)$.

Как показывает следующий пример, тернарные физические структуры представляют интерес с физической точки зрения.

Пример 2. Геометрию можно представить как "бинарную физическую структуру на одном множестве" [17, 18]. В качестве простейшего примера [9, §5 Дополнения Г.Г. Михайличенко] рассмотрим геометрию над $\mathbb{R}$ с антисимметричным расстоянием $\Delta x_{ij} = x_i - x_j$, соответствующим двум точкам $i, j \in \mathbb{R}$. Любые три расстояния Δx_{ij}, Δx_{jk}, $\Delta x_{ki} \in \mathbb{R}$ связаны между собой тождеством: $\Delta x_{ij} + \Delta x_{jk} + \Delta x_{ki} = 0$.

Переходя от геометрии к физике, рассмотрим множество «событий» и двумерные «расстояния» между двумя точками — «событиями». Имеются два измерения, с одной стороны — обычное расстояние между двумя точками, где произошли события, а с другой стороны — промежуток времени между событиями. Существенным является то, что любые измерения двухкомпонентного «расстояния» [19, 20] проводятся в определённой «системе отсчёта».

Для простоты рассмотрим двумерное пространство–время. Возьмём произвольные два события i и j в разных системах отсчёта. Расстояния и промежутки времени в разных системах отсчёта α и β могут различаться. Например, в Галилеевой системе: $\Delta x_{ij\alpha} = x_i + v_\alpha t_i - x_j - v_\alpha t_j$ и $\Delta t_{ij\alpha} = t_i - t_j$. В итоге получаем функцию $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$, сопоставляющую трём точкам $i, j \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ двухкомпонентное «расстояние»:

$$f : (ij\alpha) \mapsto (\Delta x_{ij\alpha}, \Delta t_{ij\alpha}) . \tag{4}$$

Для любых трёх событий $i, j, k \in \mathfrak{M}$ в произвольной системе отсчёта $\alpha \in \mathfrak{N}$ компоненты «расстояний» связаны равенствами:

$$\Delta x_{ij\alpha} + \Delta x_{jk\alpha} + \Delta x_{ki\alpha} = 0,\ \ \Delta t_{ij\alpha} + \Delta t_{jk\alpha} + \Delta t_{ki\alpha} = 0. \tag{5}$$

Кроме того, «расстояния» для произвольных систем отсчёта $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{N}$ и произвольных событий $i, j \in \mathfrak{M}$ связаны преобразованиями Галилея, что приводит к дополнительным связям:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta x_{ij\alpha} & \Delta x_{ij\beta} & \Delta x_{ij\gamma} \\ \Delta x_{ik\alpha} & \Delta x_{ik\beta} & \Delta x_{ik\gamma} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Это пример тернарной физической структуры (алгебраической системы Кулакова) $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathbb{R}; f; g \rangle$ ранга $(3, 3)$ на двух множествах: $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^2$ — двумерном пространстве–времени и $\mathfrak{N} = \mathbb{R}$ — множестве систем отсчёта, с функцией (4) и многокомпонентным тождеством g, состоящим из трёх тождеств (5) (рассмотрев (5) в трёх системах отсчёта) и трёх тождеств (6) (построенных на различных комбинациях i, j, k). Ранг $(3, 3)$ связан с тем, что тождества определены минимум на трёх точках из каждого множества: $i, j, k \in \mathfrak{M}$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{N}$.

Начиная с первых работ Ю.И. Кулакова математическая формулировка «теории физических структур» [9, Глава 3.] достаточно алгебраична, но в виде «алгебраической системы» она не была сформулирована. Вопросом алгебраизации теории физических структур с некоторыми ограничениями занимались Е.Е. Витяев [21] и В.К. Ионин [22, 23]

В работах [24, 25, 26], [16] последовательно строится алгебраическая теория физических структур, в рамках многосортной алгебраической системы, когда тело алгебраической системы состоит не из одного множества, а из нескольких. В §1 будут даны определения таких алгебраических систем.

Кроме того, в большинстве работ по физическим структурам используются функция (2) или

$$f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R}^k,$$

когда множества определённым образом связаны: $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^{kn}$ и $\mathfrak{N} = \mathbb{R}^{km}$, это относится именно к бинарным физическим структурам, построенным на двух множествах. Если $k > 1$, то такие структуры назывались k–метрическими. Количество независимых решений при увеличении числа «метричности» возрастает. В таком определении, рассмотренные Михайличенко тернарные физические структуры были 1–метрическими.

В предлагаемой работе за счёт перехода к рассмотрению многосортных алгебр будут построены новые решения тернарных алгебр Кулакова, которые, по-прежнему являются 1–метрическими.

§ 2. Определения

По традиции [27, §2], в алгебраической системе $\mathfrak{A}$, построенной над множеством A, функцию $f : A^n \to A$ называют n–арной операцией, а отношение $R \subseteq A^n$ называют n–арным отношением на множестве A. Имея набор операций $f_1, \ldots, f_k$ и отношений $R_1, \ldots, R_p$ для алгебраической системы $\mathfrak{A}$ используется обозначение $\mathfrak{A} = \langle A; f_1, \ldots, f_k; R_1, \ldots, R_p\rangle$, если отсутствуют отношения, то такую алгебраическую систему будем называть алгеброй.

Определение 1 Если носитель алгебраической системы $\mathfrak{A}$ определён на нескольких множествах $A_1, \ldots, A_n$, то такая алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_n; \Omega\rangle$ называется многосортной (n–сортной)[1], где $\Omega = \{f_1, \ldots, f_k, R_1, \ldots, R_p\}$ — сигнатура алгебраической системы $\mathfrak{A}$.

Определение 2 Если в алгебраической системе $\mathfrak{A}$ определены частичные операции $f \in \Omega$, действующие не на всём множестве, то такие алгебраические системы называются частичными.

Определение 3 В алгебраической системе $\langle A; \Omega\rangle$ k–ая переменная в n–арной операции $f \in \Omega$ существенна, если найдутся наборы $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ такие, что $x_i = y_i$ при $i \neq k$ и $x_k \neq y_k$, для которых справедливо $f(x_1, \ldots, x_n) \neq f(y_1, \ldots, y_n)$.

Напомним общее определение n–арных алгебр Кулакова [16]:

Определение 4 Частичная $(n+1)$–сортная алгебра $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, B; g, F, \varepsilon\rangle$, с нульарной операцией ε и частичными операциями

$$g : \mathfrak{N}_1^{p_1} \times \ldots \mathfrak{N}_n^{p_n} \to B, \quad F : B^k \to B,$$

в которых все переменные существенные задаёт p–арную алгебру Кулакова ранга $(k_1, \ldots, k_n)$, где $k = \frac{k_1!}{(k_1-p_1)!} \cdot \ldots \cdot \frac{k_n!}{(k_n-p_n)!}$ и $p = p_1 + \ldots + p_n$, если существуют подмножества $\widehat{\mathfrak{N}_i^{k_i}} \subseteq \mathfrak{N}_i^{k_i}$ такие, что выполнена следующая аксиома

K1. Для любых $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik_i}) \in \widehat{\mathfrak{N}_i^{k_i}}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, справедливо

$$F\left(g(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{np_n}), \ldots, g(\alpha_{1k_1}, \ldots, \alpha_{nk_n})\right) = \varepsilon.$$

[1] Иногда говорят *многоосновной, многобазисной.*

Используя это определение определим тернарную алгебраическую систему Кулакова на трёх множествах ранга $(2, 2, 2)$.

Определение 5 Частичная четырёх–сортная алгебраическая система $\langle \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, B; f; g\rangle$, с частичной операцией

$$f : \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3 \to B,$$

имеющей существенную зависимость от своих переменных, задаёт тернарную алгебраическую систему Кулакова ранга $(2, 2, 2)$, если для любых $i_{jk} \in \mathfrak{N}_j$, где $j \in \{1, 2, 3\}$, $k \in \{1, 2\}$ справедливо:

$$\big(f(i_{11}, i_{21}, i_{31}), f(i_{11}, i_{21}, i_{32}), \ldots, f(i_{12}, i_{22}, i_{32})\big) \in g.$$

Отношение g может состоять из нескольких отношений, как в примере 2, а может состоять из одного, как в примере 1.

Определение 6 Если алгебраическая система Кулакова содержит единственное отношение, то будем её называть системой с элементарным тождеством.

Ранее аксиомы, применяемые к бинарным физическим структурам, дополнялись условием разрешимости данного тождества относительно произвольного элемента, например, первого. В этом случае от отношения $g \in B^m$ можно перейти к новой операции $\gamma : B^{m-1} \to B$.

Определение 7 Частичная четырёх–сортная алгебра $\langle \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, B;$ $f, \gamma\rangle$, с частичными операциями

$$f : \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3 \to B,$$
$$\gamma : B^{2\cdot 2\cdot 2-1} \to B,$$

имеющими существенную зависимость от своих переменных задаёт тернарную алгебру Кулакова ранга $(2, 2, 2)$, если для любых $i_{jk} \in \mathfrak{N}_j$, где $j \in \{1, 2, 3\}$, $k \in \{1, 2\}$ справедливо равенство:

$$\gamma\big(f(i_{12}, i_{21}, i_{31}), \ldots, f(i_{12}, i_{22}, i_{32})\big) = f(i_{11}, i_{21}, i_{31}).$$

Определение 8 Отображения

$$\lambda_1 : \mathfrak{N}_1 \to \mathfrak{N}'_1,\ \ldots,\ \lambda_m : \mathfrak{N}_m \to \mathfrak{N}'_m,\ \chi : B \to B'$$

задают гомоморфизм алгебры Кулакова $\langle \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_m, B; f, \gamma\rangle$ ранга $(n_1,$ $\ldots, n_m)$ в алгебру $\langle \mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_m, B'; f', \gamma'\rangle$, если диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{N}_1 \times \ldots \times \mathfrak{N}_m & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \lambda_1\times\ldots\times\lambda_m}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \chi} \\ \mathfrak{N}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{N}'_m & \xrightarrow{f'} & B' \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} B^{n_1\cdots n_m-1} & \xrightarrow{\gamma} & B \\ {\scriptstyle \chi^{n_1\cdots n_m-1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \chi} \\ B'^{n_1\cdots n_m-1} & \xrightarrow{\gamma'} & B' \end{array}$$

коммутативны.

Если все отображения $(\lambda_1, \ \ldots \ , \lambda_m, \chi)$ биективны, то они задают изоморфизм алгебр Кулакова.

При поиске тернарной физической структуры ранга $(2,2,2)$ для $B = \mathbb{R}$ в работе [15] Михайличенко фактически накладывал дополнительное условие на размерности множеств так, что они оказывались равными $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3$.

Откажемся от этого условия, но взамен определим другие дополнительные аксиомы для функции $f : \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3 \to B$ на множествах $\mathfrak{N}_1 = \widehat{B^3}$, $\mathfrak{N}_2 = \widehat{B^2}$, $\mathfrak{N}_3 = B$. «Крышечками» над множествами B^n обозначим некоторые их подмножества $\widehat{B^n} \subseteq B^n$.

K1. Для произвольных $b_1 \in B$, $i_1 \in \mathfrak{N}_1, i_2 \in \mathfrak{N}_2$ существует единственный $i_3 \in \mathfrak{N}_3$ такой, что $f(i_1, i_2, i_3) = b_1$.

K2. Для произвольных $(b_1, b_2) \in \widehat{B^2}$, $i_1 \in \mathfrak{N}_1, (i_{31}, i_{32}) \in \widehat{\mathfrak{N}_3^2}$ существует $i_2 \in \mathfrak{N}_2$ такой, что $f(i_1, i_2, i_{31}) = b_1, f(i_1, i_2, i_{32}) = b_2$.

K3. Для произвольных $(b_1, b_2, b_3) \in \widehat{B^3}$, $(i_{21}, i_{22}) \in \widehat{\mathfrak{N}_2^2}, (i_{31}, i_{32}) \in \widehat{\mathfrak{N}_3^2}$ существует $i_1 \in \mathfrak{N}_1$ такой, что

$$f(i_1, i_{21}, i_{31}) = b_1, f(i_1, i_{22}, i_{32}) = b_2, f(i_1, i_{21}, i_{32}) = b_3.$$

Эти аксиомы требуют однозначную разрешимость соответствующих уравнений.

§ 3. Основные построения

Пример 3. В качестве примера, удовлетворяющего данным требованиям, можно рассмотреть модификацию бинарной физической структуры ранга $(4,2)$ [13, 28] так, что $i_1 = (x, y, z) \in \mathfrak{N}_1 = \widehat{\mathbb{R}^3}$, $i_2 = (\xi, \mu) \in \mathfrak{N}_2 = \widehat{\mathbb{R}^2}$, $i_3 = (u) \in \mathfrak{N}_3 = \mathbb{R}$, тогда функцию $f : \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3 \to \mathbb{R}$, с точностью до локального изоморфизма можно представить в виде

$$f\,(x, y, z; \xi, \mu; u) = \frac{(\xi u + \mu)\, x + y}{(\xi u + \mu) + z}. \tag{7}$$

Непосредственно проверяется, что дополнительные аксиомы **K1**, **K2**, **K3** выполняются.

Функцию $\gamma : \widehat{\mathbb{R}^7} \to \mathbb{R}$ можно записать, разрешая определитель

$$\begin{vmatrix} b_{111} & b_{121} & b_{112} & b_{122} \\ b_{211} & b_{221} & b_{212} & b_{222} \\ b_{111} \cdot b_{211} & b_{121} \cdot b_{221} & b_{112} \cdot b_{212} & b_{122} \cdot b_{222} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

относительного b_{111}, где $b_{ijk} = f(x_i, y_i, z_i, \xi_j, \mu_j, u_k)$.

Данный пример обобщим на ограниченно точно трижды транзитивные группы [29]:

Определение 9 Для множества B и множества кортежей B^n определим максимальное подмножество $\widehat{B^n} = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}$, состоящее из кортежей $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n$, в которых все элементы попарно не равны.

При помощи подмножества $\Omega \subseteq \widehat{B^n}$ определим:

Определение 10 Группа $T_n(B)$ преобразования множества B называется Ω ограниченно точно n–транзитивной, если для произвольных кортежей

$$(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \Omega$$

существует единственный элемент $g \in T_n$, для которого справедливо равенство $g(x_i) = y_i$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Если подмножество Ω не существенно в рассмотрении, то вместо «Ω ограниченно точно n–транзитивной группы» будем говорить «ограниченно точно n–транзитивная группа».

В свою очередь, ограниченно точно n–транзитивные группы удобно описываются при помощи обобщённого матричного умножения [25].

Обобщённое матричное умножение $\langle \Omega, \cdot \rangle$ для Ω ограниченно точно 3–транзитивной группы $T_3(B)$ строится при помощи функции $\psi : B \times \Omega \to B$ и задаётся формулой:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \\ (\psi(x_1, y_1, y_2, y_3), \psi(x_2, y_1, y_2, y_3), \psi(x_3, y_1, y_2, y_3)). \quad (9)$$

Нейтральный элемент группы $\langle \Omega, \cdot \rangle$ определяется выделенными элементами $e_1, e_2, e_3 \in B$, удовлетворяющими тождествам

$$\psi(e_i, y_1, y_2, y_3) = y_i, \ i = 1, 2, 3, \ \psi(x, e_1, e_2, e_3) = x. \quad (10)$$

Выражение (7), полученное из дробно–линейного преобразования, перепишем в виде функции

$$\psi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t(x_1 x_2 + x_1 x_3 - 2x_2 x_3) + x_1(x_2 - x_3)}{t(2x_1 - x_2 - x_3) + x_2 - x_3}$$

для записи группового умножения (9) так, что $e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = -1$.

Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Если на множестве B действует ограниченно точно 3–транзитивная группа $G_3 = \langle \Omega_3, \cdot, ^{-1}, (e_1, e_2, e_3) \rangle$ и ограниченно точно 2–транзитивная группа $G_2 = \langle \Omega_2, \circ, ^{-1}, (e_1, e_2) \rangle$, то на множествах $\mathfrak{N}_1 = \Omega_3$, $\mathfrak{N}_2 = \Omega_2$, $\mathfrak{N}_3 = B$ можно определить тернарную алгебру Кулакова $\langle \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, B; f, g, \rangle$, для которой справедливы аксиомы **K1**, **K2**, **K3** с функцией $f : \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3 \to B$, определённой равенством:*

$$f\left(x, y, z; \xi, \mu; u\right) = \left(u \circ \left(\xi, \mu\right)\right) \cdot \left(x, y, z\right). \tag{11}$$

Доказательство. Проверим выполнение аксиом **K1**, **K2** и **K3**. Уравнение $a = \left(u \circ \left(\xi, \mu\right)\right) \cdot \left(x, y, z\right)$, построенное при помощи действия двух групп G_2 и G_3 разрешимо относительно аргумента u. Действительно, последовательно умножая справа обе части равенства на обратные элементы, придём к виду:

$$\left(a \cdot \left(x, y, z\right)^{-1}\right) \circ \left(\xi, \mu\right)^{-1} = u.$$

Аксиома **K1** выполнена.

Для вычисления элемента $\left(\xi, \mu\right)$ имеется система уравнений:

$$a = u_1 \circ \left(\xi, \mu\right) \cdot \left(x, y, z\right), \quad b = u_2 \circ \left(\xi, \mu\right) \cdot \left(x, y, z\right),$$

где $\left(a, b\right) \in \Omega_2$. Домножая каждое равенство справа на $\left(x, y, z\right)^{-1}$, придём к системе:

$$a \cdot \left(x, y, z\right)^{-1} = \overline{a} = u_1 \circ \left(\xi, \mu\right), \quad b \cdot \left(x, y, z\right)^{-1} = \overline{b} = u_2 \circ \left(\xi, \mu\right).$$

Систему из двух уравнений

$$\overline{a} = u_1 \circ \left(\xi, \mu\right), \quad \overline{b} = u_2 \circ \left(\xi, \mu\right)$$

можно записать в «матричном» виде

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(u_1, u_2\right) \circ \left(\xi, \mu\right).$$

Тогда

$$\left(u_1, u_2\right)^{-1} \circ \left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\xi, \mu\right)$$

и, следовательно, аксиома **K2** выполнена.

Проверим аксиому **K3**. Систему из трёх уравнений

$$a = \left(u_1 \circ \left(\xi_1, \mu_1\right)\right) \cdot \left(x, y, z\right), \quad b = \left(u_2 \circ \left(\xi_1, \mu_1\right)\right) \cdot \left(x, y, z\right),$$

$$c = \left(u_2 \circ \left(\xi_2, \mu_2\right)\right) \cdot \left(x, y, z\right)$$

для $\left(a, b, c\right) \in \Omega_3$ можно записать в виде

$$a = \widetilde{a} \cdot \left(x, y, z\right), \quad b = \widetilde{b} \cdot \left(x, y, z\right), \quad c = \widetilde{c} \cdot \left(x, y, z\right), \tag{12}$$

где
$$\widetilde{a} = u_1 \circ (\xi_1, \mu_1)\,, \quad \widetilde{b} = u_2 \circ (\xi_1, \mu_1)\,, \quad \widetilde{c} = u_2 \circ (\xi_2, \mu_2)\,.$$
Систему (12), в свою очередь, можно записать в виде произведения
$$(a, b, c) = \left(\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}\right) \cdot (x, y, z)\,,$$
которое имеет решение
$$(x, y, z) = \left(\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}\right)^{-1} \cdot (a, b, c)\,.$$

Далее найдём общий вид функции $\gamma : \widehat{B^7} \to B$. Рассмотрим произвольные $(x_1, y_1, z_1) \in \mathfrak{N}_1, (\xi_1, \mu_1) \in \mathfrak{N}_2$ и для произвольных $b_{111} \neq b_{112} \in B$ найдём $u_1, u_2 \in \mathfrak{N}_3$:
$$\left(b_{111} \cdot (x_1, y_1, z_1)^{-1}\right) \circ (\xi_1, \mu_1)^{-1} = u_1,$$
$$\left(b_{112} \cdot (x_1, y_1, z_1)^{-1}\right) \circ (\xi_1, \mu_1)^{-1} = u_2.$$
По произвольным $b_{121}, b_{122} \in B$, для которых выполнено $(b_{121}, b_{122}) \in \Omega_2$, найдём $(\xi_2, \mu_2) \in \mathfrak{N}_2$. Воспользовавшись системой уравнений
$$b_{121} \cdot (x_1, y_1, z_1)^{-1} = u_1 \circ (\xi_2, \mu_2)\,, \quad b_{122} \cdot (x_1, y_1, z_1)^{-1} = u_2 \circ (\xi_2, \mu_2)\,,$$
найдём решение
$$(\xi_2, \mu_2) = (u_1, u_2)^{-1} \left(b_{121} \cdot (x_1, y_1, z_1)^{-1},\ b_{122} \cdot (x_1, y_1, z_1)^{-1}\right).$$

Теперь найдём $(x_2, y_2, z_2) \in \mathfrak{N}_1$ по произвольным $(b_{211}, b_{221}, b_{212}) \in \Omega_3$:
$$(x_2, y_2, z_2) = (u_1 \circ (\xi_1, \mu_1)\,, u_1 \circ (\xi_2, \mu_2)\,, u_2 \circ (\xi_1, \mu_1))^{-1} \cdot (b_{211}, b_{221}, b_{212})\,.$$

Саму функцию $\gamma : \widehat{B^7} \to B$ получим из выражения
$$b_{222} = (u_2 \circ (\xi_2, \mu_2)) \cdot (x_2, y_2, z_2)\,.$$
Подставим найденные решения
$$\begin{aligned} b_{222} = &\left(b_{112} \circ (b_{111}, b_{112})^{-1} \circ (b_{121}, b_{122})\right) \cdot \\ &\left(b_{111}, b_{111} \circ (b_{111}, b_{112})^{-1} \circ (b_{121}, b_{122})\,, b_{112}\right)^{-1} \cdot (b_{211}, b_{221}, b_{212}) = \\ &(e_2 \circ (b_{121}, b_{122})) \cdot (b_{111}, e_1 \circ (b_{121}, b_{122})\,, b_{112})^{-1} \cdot (b_{211}, b_{221}, b_{212})\,. \end{aligned}$$
Учитывая равенства
$$x \circ (x, y)^{-1} = e_1, \quad y \circ (x, y)^{-1} = e_2,$$

которые получаются для группы из (9) и (10) для произвольных $(x, y) \in \Omega_2$ и, воспользовавшись тождествами (10), придём к функции $\gamma : \widehat{B^7} \to B$, принимающей вид

$$b_{222} = b_{122} \cdot (b_{111}, b_{121}, b_{112})^{-1} \cdot (b_{211}, b_{221}, b_{212}).$$

Теорема доказана.

В случае $B = \mathbb{R}$ или $B = \mathbb{C}$ группа $\langle \Omega_3, \cdot \rangle$ является единственной точно 3–транзитивной группой преобразования вещественной (комплексной) прямой [30] и для неё соответствующая функция $\gamma : \widehat{B^7} \to B$ совпадает с функцией полученной из (8).

Если множество $B \subseteq \mathbb{R}^n\,(\mathbb{C}^n)$, то соответствующих ограниченно точно 3–транзитивных групп преобразований будет уже несколько и для каждой из них можно построить неизоморфные тернарные алгебры Кулакова ранга $(2, 2, 2)$. Например, над множеством $\mathbb{R}^2$ существует пять неизоморфных решений [29, Лемма 6], построенных над 3–псевдополями.

Отметим, что если группа $\langle \Omega_2, \circ \rangle$ не является подгруппой $\langle \Omega_3, \cdot \rangle$, то существуют неизоморфные алгебры Кулакова, с одинаковой функцией $\gamma : \widehat{B^7} \to B$. Подобная ситуация возникает и в геометриях максимальной подвижности [31, 32], когда разные геометрии, построенные на разных метрических функциях, обладают одинаковыми функциями γ.

Переписав функцию f в виде (11), можно записать преобразования, оставляющие функцию инвариантной в виде:

$$f(x, y, z; \xi, \mu; u) = \big((u \circ (t_1, t_2)) \circ ((t_1, t_2)^{-1} \circ (\xi, \mu))\big) \cdot (x, y, z) = \\ f(x, y, z; \xi', \mu'; u').$$

Если $G_2 = St_{G_3}(e_3)$, то преобразования, оставляющие функцию f инвариантной, можно записать в виде

$$f(x, y, z; \xi, \mu; u) = (u(t_1, t_2, e_3))((t_1, t_2, e_3)^{-1}(\xi, \mu, e_3)(t_3, t_4, e_3))\cdot \\ ((t_3, t_4, e_3)^{-1}(x, y, z)) = u'(\xi', \mu', e_3)(x', y', z') = f(x', y', z'; \xi', \mu'; u').$$

Известно [13], что бинарные физические структуры ранга (m, n) над множеством вещественных чисел имеются только для случаев $|m - n| < 2$ и $(m, n) = (4, 2)$ или $(2, 4)$. Если $m = n + 1$, то функцию $f : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно записать в виде:

$$f_{13}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_{n-1} y_{n-1} + y_n, \tag{13}$$

если $m = n - 1$, то в виде:

$$f_{14}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{m-1}) = x_1 y_1 + \ldots + x_{m-1} y_{m-1} + x_m. \tag{14}$$

Если $m = n$, то имеются два неэквивалентных решения с функциями $f : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ в виде:

$$f_{15}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = x_1 y_1 + \ldots + x_{n-1} y_{n-1}, \tag{15}$$

$$f_{16}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = x_1 y_1 + \ldots + x_{n-2} y_{n-2} + x_{n-1} + y_{n-1}. \tag{16}$$

Соответствующие тождества g_{1k} можно записать в виде равенства нулю определителей. Так для решения (13) это:

$$\begin{vmatrix} f_{13}(i_1, \alpha_1) & \cdots & f_{13}(i_1, \alpha_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{13}(i_{n+1}, \alpha_1) & \cdots & f_{13}(i_{n+1}, \alpha_n) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

для решения (14):

$$\begin{vmatrix} f_{14}(i_1, \alpha_1) & \cdots & f_{14}(i_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{14}(i_{n-1}, \alpha_1) & \cdots & f_{14}(i_{n-1}, \alpha_n) \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

для решения (15):

$$\begin{vmatrix} f_{15}(i_1, \alpha_1) & \cdots & f_{15}(i_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{15}(i_n, \alpha_1) & \cdots & f_{15}(i_n, \alpha_n) \end{vmatrix} = 0,$$

для решения (16):

$$\begin{vmatrix} f_{16}(i_1, \alpha_1) & \cdots & f_{16}(i_1, \alpha_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{16}(i_n, \alpha_1) & \cdots & f_{16}(i_n, \alpha_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

где $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Следовательно имеет место утверждение:

Теорема 2 *Пусть даны трёх–сортные алгебраические системы $\langle \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{m-1}, \mathbb{R}; f_{1k}; g_{1k}\rangle$, задающие бинарные алгебраические системы Кулакова ранга (m,n) с операциями $f_{1k} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ вида* (13), (14), (15) *или* (16). *Если $m = m_1 m_2$ для натуральных $m_1, m_2 > 1$, то операции*

$$F_{13} = (x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$F_{14} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F_{15} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$F_{16} = (x_1, \dots, x_n, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

определяют четырёх–сортные алгебраические системы $\langle \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{(n-1)^2}, \mathbb{R}^{m-1}, \mathbb{R}; F_{1k}; g_{1k}\rangle$, задающие соответствующие тернарные алгебраические системы Кулакова ранга (m_1, m_2, n).

Доказательство очевидное и состоит в проверке выполнения определения 5. Отношения g_{1k} совпадают с отношениями из соответствующих алгебраических систем Кулакова ранга (m,n).

Список литературы

1. *Wigner E.* The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1960. Т. 131, № 1. Перевод: *Вигнер Е. Успехи физических наук.* 1968. Т. 94, № 6. С. 535–546.

2. *Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Математический анализ* / Под ред. А. Н. Тихонова. 2–е нзд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1985.

3. *Krantz D., Luce R., Suppes P., Tversky A. Foundations of Measurement* V.1–3, Acad. Press, NY, London. 1971, 1989, 1990.

4. *Пфанцагль И. Теория измерений.* Мир, 1976.

5. *Бриджмен П. Анализ размерностей.* Ижевск: РХД. 2001.

6. *Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.* изд. 8-е, Наука, М., 1977.

7. *Bertrand J.* Sur l'homogenete dans les formules de physique // *Comptes rendus.* 1878. Т. 86, № 15. С. 916–920.

8. *Buckingham E.* On physically similar systems: illustrations of the use of dimensional equations // *Physical Review.* 1914. Т. 4, № 4. С. 345–376.

9. *Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур* (дополнение Михайличенко Г.Г). Новосибирск, Изд–во НГУ, 1968.

10. *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // *Сиб. матем. журн.* 1971. Т. 12, № 5. С. 1142–1145.

11. *Simonov A. A., Kulakov Y. I., Vityaev E. E.* On an algebraic definition of laws // *Journal of Mathematical Psychology*, 2014. V. 58. P. 13–20.

12. *Кулаков Ю. И.* Об одном принципе, лежащем в основании классической физики // *Докл. АН СССР.* 1970. Т. 193, № 1. С. 72–75.

13. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // *ДАН СССР.* 1972. Т. 206, № 5. С. 1056–1058.

14. *Михайличенко Г. Г.* Тернарная физическая структура ранга (3,2) // *Укр. мат. журн.* 1970. Т. 22, № 6. С. 837–841.

15. *Михайличенко Г. Г.* Тернарная физическая структура ранга (2,2,2) // *Изв. вузов. Математика.* 1976. Т. 171, № 8. С. 60–67.

16. *Нещадим М. В., Симонов А. А.* Тождества и n-арные алгебры Кулакова // *Мат. труды.* 2022. Т. 25, № 2. С. 203–219.

17. *Михайличенко Г. Г.* Двумерные геометрии. // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 260, № 4. С. 803–805.

18. *Лев В. Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур // Новосибирск: Методологические и технологические проблемы информационно–логических систем (вычислительные системы, 125), 1988, С. 90–103.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 113-133
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 113-133

19. *Михайличенко Г. Г.* Двуметрические физические структуры и комплексные числа. // *Докл. АН СССР.* 1991. Т. 321, № 4. С. 677–680.

20. *Кыров В. А.* Двуметрические пространства. // *Изв. вузов. Матем.*, 2005. № 8. С. 27–38.

21. *Витяев Е. Е.* Числовое, алгебраическое и конструктивное представления одной физической структуры // Новосибирск: Логико–математические основы проблемы МОЗ, 107: Вычислительные системы, 1985, С. 40–51.

22. *Ионин В. К.* Абстрактные группы как физические структуры // Новосибирск: Системология и методологические проблемы информационно–логических систем, 135: Вычислительные системы, 1990, С. 40–43.

23. *Ионин В. К.* К определению физических структур // *Тр. Ин-та математики СО РАН*, 1992. № 21. С. 42–51

24. *Симонов А. А.* Обобщённое матричное умножение как эквивалентное представление Теории физических структур // Приложение 2 в монографии Ю.И. Кулакова Теория физических структур. Москва. 2004. С. 673–707.

25. *Симонов А. А.* Псевдоматричные группы и физические структуры // *Сиб. матем. журн.* 2015. Т. 56, № 1. С. 211–226.

26. *Нещадим М. В., Симонов А. А.* Об алгебраических системах Кулакова на группах // *Сиб. матем. журн.* 2021. Т. 62, № 6. С. 1357–1368.

27. *Мальцев А. И. Алгебраические системы.* Наука: М. 1970.

28. *Кыров В. А., МихайличенкоГ. Г.* Решение трех систем функциональных уравнений, связанных с комплексными, двойными и дуальными числами // *Изв. вузов. Матем.* 2023. № 7. С. 42–51.

29. *Симонов А. А.* Обобщение точно транзитивных групп // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2014. Т. 78, № 6. С. 153–178.

30. *Tits J.* Sur les groupes doublement transitif continus // *Comment. Math. Helv.* 1952. № 26. P. 203–224; Sur les groupes doublement transitif continus: correction et complements, *Comment. Math. Helv.* 1956. № 56. P. 234–240.

31. *Михайличенко Г. Г. Двумерные геометрии* (С приложением В.А. Кырова), Барнаул, Горно-Алтайск: Изд-во ГАГУ, 2004.

32. *Михайличенко Г.Г. Математические основы и результаты теории физических структур* (С приложением А.Н. Бородина), Горно-Алтайск, Новосибирск: Изд-во НГУ, 2016.

References

1. *Wigner E.* The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1960. T. 131, № 1.

2. *Ilyin, V. A. Sadovnichy, Bl. X. Sendov. Mathematical Analysis* / Edited by A.N.Tikhonov. 2nd ed., revised by M.: Publishing House of Moscow State University, 1985.

3. *Krantz DH, Luce RD, Suppes P, Tversky A. Foundations of Measurement* V.1–3, Acad. Press, NY, London. 1971, 1989, 1990.

4. *Pfanzagl I. Theory of measurement.* Wiirzburg; Wien, 1971.

5. *Bridgman P. W. Dimensional Analysis.* Yale University Press, 1922.

6. *Sedov L. I. Methods of similarity and dimension in Mechanics.* 8th ed., Nauka, M., 1977.

7. *Bertrand J.* Sur l'homogenete dans les formules de physique // *Comptes rendus.* 1878. V. 86, № 15. C. 916–920.

8. *Buckingham E.* On physically similar systems: illustrations of the use of dimensional equations // *Physical Review.* 1914. T. 4, № 4. C. 345–376.

9. *Kulakov Yu.I. Elements of the theory of physical structures* (supplement by Mikhailichenko G.G.). Novosibirsk, NSU Publishing House, 1968.

10. *Kulakov Yu.I.* Mathematical formulation of the theory of physical structures // *Siberian Math. J.* 1971. T. 12, № 5. P. 822–824

11. *Simonov A.A., Kulakov Y.I., Vityaev E.E.* On an algebraic definition of laws // *Journal of Mathematical Psychology*, 2014. V. 58. P. 13–20.

12. *Kulakov Yu.I.* On a principle underlying the classical physics // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1970. T. 193, № 1. P. 72–75.

13. *Mikhailichenko G. G.* The solution of functional equations in the theory of physical structures // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1972. T. 206, № 5. P. 1056–1058.

14. *Mikhailichenko G. G.* Ternary physical structure of rank (3,2) // *Ukrainian mat. journal.* 1970. T. 22, № 6. C. 837–841.

15. *Mikhailichenko G. G.* A ternary physical structure of rank (2,2,2) // *Soviet Math. (Iz. VUZ).* 1976. V. 20, № 8. C. 48–54.

16. *Neshchadim M. V., SimonovA. A.* Identities and n-ary Kulakov algebras // *Siberian Adv. Math..* 2023. V. 33, № 2. P. 140–150.

17. *Mihailichenko G.G.* Two-dimensional geometry. // *Doklady Soviet Math.* 1981. V. 24, № 2. C. 346–348.

18. *Lev V. Kh.* Three-dimensional geometries in the theory of physical structures // Novosibirsk: Methodological and technological problems of information-logical systems (Computing systems, 125), 1988, pp. 90–103.

19. *Mihailichenko G.G.* Dimetric physical structures and complex numbers. // *Dokl. Math..* 1992. V. 44, № 3. P. 775–778.

20. *Kyrov V. A.* Two-metric spaces. // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005. V. 49,№ 8. C. 25–35.

21. *Vityaev E. E.* Numerical, algebraic, and constructive representations of a single physical structure // Novosibirsk: Logical and Mathematical Foundations of the problem of the Ministry of Health, 107: Computing Systems, 1985, pp. 40–51.

22. *Ionin V. K.* Abstract groups as physical structures // Novosibirsk: Systemology and methodological problems of information-logical systems, 135: Computing Systems, 1990, pp. 40–43.

23. *Ionin V. K.* On the definition of physical structures // *Trudy Inst. Mat. SO RAN*, 1992. № 21. P. 42–51

24. *Simonov A. A.* Generalized matrix multiplication as an equivalent representation of the Theory of physical structures // Appendix 2 in Y.I. Kulakov's monograph Theory of physical structures. Moscow. 2004. C. 673–707.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 113-133
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 113-133

25. *Simonov A. A.* Pseudomatrix groups and physical structures // *Sib. matem. zhurn.* 2015. V. 56, № 1. C. 177–190.

26. *Neshchadim M. V., Simonov A. A.* Kulakov algebraic systems on groups // *Siberian Math. J.* 2021. T. 62, № 6. P. 1100–1109.

27. *Mal'cev A. I. Algebraic systems.* Springer Berlin Heidelberg 1973.

28. *Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G.* Solution of three systems of functional equations related to complex, double and dual numbers // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 2023. № 7. P. 42–51.

29. *Simonov A. A.* On generalized sharply n-transitive groups // *Izv. Math.* 2014. T. 78, № 6. P. 1207–1231.

30. *Tits J.* Sur les groupes doublement transitif continus // *Comment. Math. Helv.* 1952. № 26. P. 203–224; Sur les groupes doublement transitif continus: correction et complements, *Comment. Math. Helv.* 1956. № 56. P. 234–240.

31. *Mikhailichenko G. G. Two-dimensional geometries* (With an appendix by V.A. Kyrov), Barnaul, Gorno-Altaysk: GAGU Publishing House, 2004.

32. *Mikhailichenko G.G. Mathematical foundations and results of the theory of physical structures* (With an appendix by A.N. Borodin), Gorno-Altaysk, Novosibirsk: NSU Publishing House, 2016.

Информация об авторах

Михаил Владимирович Нещадим, доктор физико-математических наук, доцент
AuthorID: 5367
Scopus Author ID 6602439021

Андрей Артёмович Симонов, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN 3031-2673 AuthorID: 13320
Scopus Author ID 55811841800

Author Information

Mikhail V. Neshchadim, Doctor of Mathematics, Associate Professor
AuthorID: 5367
Scopus Author ID 6602439021

Andrey A. Simonov, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 3031-2673 AuthorID: 13320
Scopus Author ID 55811841800

*Статья поступила в редакцию 08.09.2024;
одобрена после рецензирования 27.01.2025; принята к публикации
29.01.2025*

*The article was submitted 08.09.2024;
approved after reviewing 27.01.2025; accepted for publication 29.01.2025*